OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*
a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera. Determine para qué valores de λ el sistema de ecuaciones que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} 2\lambda x - 2y - \lambda z = 2 \\ \lambda x - y + z = 5 \\ 3\lambda x + 4y + (\lambda - 1)z = \lambda - 5 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la inversa de la matriz: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2\lambda & -2 & -\lambda \\ \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -\lambda \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\lambda-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & \lambda-1-3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda-2 \\ 7 & \lambda-4 \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (-7) \cdot (\lambda+2)$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow 7\lambda \cdot (\lambda+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{-2\ ,\ 0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sist.\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ \lambda = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ -6 & 4 & -3 & -7 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -8 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -6 & -22 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3$$

Sistema Incompatible

$Si\ \lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3$$

Sistema Incompatible

b) Para que exista la inversa de una matriz su determinante no puede ser nulo

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (2-1) = 3 \neq 0 \Rightarrow Existe\ M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot adj\ M^t \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$adj\ M^t = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que satisfacen que $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = 10$. Determine $\vec{u}\times\vec{v}$.

b) *(1 punto)* Considere las rectas siguientes: $r:\begin{cases}2x-y=0\\ ax-z=0\end{cases}$ $\quad s:\begin{cases}x+by=3\\ y+z=3\end{cases}$

1) *(0,5 puntos)* Determine los valores de **a ≠ 0** y **b ≠ 0** para que las rectas sean paralelas.
2) *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de **a ≠ 0** y **b ≠ 0** para que las rectas sean coincidentes?

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\Rightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{10}{5\cdot 2}=1\Rightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=1\Rightarrow\left(\vec{u},\vec{v}\right)=arc\cos 1=0^{\circ}=0^{r}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot sen\left(\vec{u},\vec{v}\right)=5\cdot 2\cdot sen\ 0=0$$

b.1) Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} y=2x\Rightarrow z=ax\Rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=2\lambda\Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1\,,2\,,a)\\ z=a\lambda\end{cases}\\ x=3-by\Rightarrow z=3-y\Rightarrow s:\begin{cases}x=3-b\alpha\\ y=\alpha\quad\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=(-b\,,1\,,-1)\\ z=3-\alpha\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{-b}=\frac{2}{1}=\frac{a}{-1}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{-b}=\frac{2}{1}\Rightarrow b=-\frac{1}{2}\\ \frac{2}{1}=\frac{a}{-1}\Rightarrow a=-2\end{cases}$$

b.2) Estudiaremos si para los valores hallados en el anterior apartado (condición de paralelismo), hay puntos comunes entre las dos rectas, para ello veremos si un punto **R** de la recta **r** (tomaremos el indicado en su ecuación) es punto de la recta s, de serlo serán coincidentes, de no serlo son paralelas

$$r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=2\lambda\\ z=-2\lambda\end{cases}\Rightarrow R=(0\,,0\,,0)\Rightarrow s:\begin{cases}0=3-\left(-\frac{1}{2}\right)\alpha=3+\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=-3\Rightarrow\alpha=-6\\ 0=\alpha\\ 0=3-\alpha\Rightarrow\alpha=3\end{cases}$$

No existe ningún valor de a y de b que cumplan la condición

3. *(5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Usando el cambio de variable $t=e^x$, calcule: $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

b) *(1,5 puntos)* Determine el límite siguiente: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1-sen\,(x)}\right]^{\frac{\cos(x)}{sen\,(x)}}$

.

c) *(1,5 puntos)* Determine la ecuación de la curva **f(x)** sabiendo que la recta tangente en x =3 es y = 9x −13 y la derivada segunda verifica que f''(x) = 4, para cualquier valor de x.

$a)$

$$\int \frac{e^{2x}\cdot e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx=\int \frac{t^2}{t^2+3t+2}\,dt=\int\left(1+\frac{-3t-2}{t^2+3t+2}\right)dt=\int dt-\int\frac{3t+2}{t^2+3t+2}\,dt \quad (2)$$

$$e^x=t\Rightarrow e^x dx=dt \qquad\qquad De\ (1)$$

$$t^2+3t+2=0\Rightarrow \Delta=3^2-4\cdot1\cdot2=1\geq0\Rightarrow t=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{-3+1}{2}=-1\\ t=\dfrac{-3-1}{2}=-2\end{cases}\Rightarrow t^2+3t+2=(t+1)(t+2)$$

$$\begin{array}{l|l} t^2 & t^2+3t+2 \\ \hline \underline{-t^2-3t-2} & 1 \\ \quad -3t-2 & \end{array} \qquad (1)$$

$$\frac{3t+2}{t^2+3t+2}=\frac{3t+2}{(t+1)(t+2)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}=\frac{A(t+2)+B(t+1)}{(t+1)(t+2)}\Rightarrow A(t+2)+B(t+1)=3t+2\Rightarrow$$

$$\begin{cases}Si\ t=-1\Rightarrow A(-1+2)+B(-1+1)=3(-1)+2\Rightarrow A=-1\\ Si\ t=-2\Rightarrow A(-2+2)+B(-2+1)=3(-2)+2\Rightarrow -B=-4\Rightarrow B=4\end{cases}\Rightarrow\frac{3t+2}{t^2+3t+2}=\frac{-1}{t+1}+\frac{4}{t+2}$$

$$De\ (2)\quad \int\frac{e^{2x}\cdot e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx=t+\int\frac{dt}{t+1}\,dt-4\int\frac{dt}{t+2}=e^x+\int\frac{du}{u}\,dt-4\int\frac{dv}{v}=e^x+\ln u-4\cdot\ln v$$

$$\begin{cases}t+1=u\Rightarrow dt=du\\ t+2=v\Rightarrow dt=dv\end{cases}$$

$$\int\frac{e^{2x}\cdot e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx=e^x+\ln u-\ln v^4=e^x+\ln\frac{u}{v^4}=e^x+\ln\frac{t+1}{(t+2)^4}=e^x+\ln\frac{e^x+1}{\left(e^x+2\right)^4}+K$$

$b)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1-sen\,(x)}\right]^{\frac{\cos\,(x)}{sen\,(x)}}=\left[\frac{1}{1-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}}=\left[\frac{1}{1-1}\right]^{\frac{0}{1}}=\left[\frac{1}{0}\right]^{0}=\infty^{0}\Rightarrow$$

$$Llamando\ L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1-sen\,(x)}\right]^{\frac{\cos\,(x)}{sen\,(x)}}\Rightarrow \ln\,L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\left\{\left[\frac{1}{1-sen\,(x)}\right]^{\frac{\cos\,(x)}{sen\,(x)}}\right\}\Rightarrow$$

$$\ln\,L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\,(x)}{sen\,(x)}\cdot\ln\left[\frac{1}{1-sen\,(x)}\right]=\frac{1}{1-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left[\frac{1}{1-sen\,(x)}\right]}{\frac{sen\,(x)}{\cos\,x}}=\frac{\ln\left[\frac{1}{1-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]}{tg\left(\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\ln\left(\frac{1}{1-1}\right)}{\infty}=\frac{\ln\left(\frac{1}{0}\right)}{\infty}=\frac{\ln\,(\infty)}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\frac{1}{1-sen\,(x)}}\cdot\frac{-[-\cos\,(x)]}{[1-sen\,(x)]^{2}}}{\frac{1}{\cos^{2}(x)}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos\,(x)}{1-sen\,(x)}}{\frac{1}{\cos^{2}(x)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{3}\,(x)}{1-sen\,(x)}=\frac{\cos^{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{0^{3}}{1-1}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^{2}\,(x)\cdot[-sen\,(x)]}{-\cos\,(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}3\cos\,(x)\cdot sen\,(x)=3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot 0\cdot 1=0\Rightarrow$$

$$\ln\,L=0\Rightarrow L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1-sen\,(x)}\right]^{\frac{\cos\,(x)}{sen\,(x)}}=e^{0}=1$$

$c)$

$$f'(x)=\int f''(x)\,dx=\int 4\,dx=4x+K\Rightarrow f'(3)=9\Rightarrow 4\cdot 3+K=9\Rightarrow K=9-12=-3\Rightarrow f'(x)=4x-3$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x-3)\,dx=4\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{2}-3x=2x^{2}-3x+C\Rightarrow f(3)=9\cdot 3-13=14\Rightarrow$$

$$2\cdot 3^{2}-3\cdot 3+C=14\Rightarrow 18-9+C=14\Rightarrow C=5\Rightarrow f(x)=2x^{2}-3x+5$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera y considere la matriz y vector siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & \lambda\\ -5 & -\lambda & -5\\ \lambda & 0 & 3\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

1) *(1 punto)* ¿Para qué valores de λ existe la matriz inversa $(\mathbf{A - 2I})^{-1}$, siendo **I** la matriz identidad de orden **3**?

2) *(1 punto)* Si $\lambda = 0$, encuentre los valores de **x** , **y** y **z** que satisfacen la ecuación

AX = 2X + b donde $b=\begin{pmatrix}1\\ y\\ 1\end{pmatrix}$

b) *(1 punto)* Sean F_1 , F_2 y F_3 la primera, segunda y tercera filas, respectivamente, de una matriz **M** de orden **3 × 3** cuyo determinante es **−2**.

Calcule el determinante de una matriz cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente: $\mathbf{5F_1 - F_3}$, $\mathbf{3F_3}$ y $\mathbf{F_2}$

a.1) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$A-2I=\begin{pmatrix}3 & 0 & \lambda\\ -5 & -\lambda & -5\\ \lambda & 0 & 3\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & \lambda\\ -5 & -\lambda & -5\\ \lambda & 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda\\ -5 & -\lambda-2 & -5\\ \lambda & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix}1 & 0 & \lambda\\ -5 & -\lambda-2 & -5\\ \lambda & 0 & 1\end{vmatrix}=(-\lambda-2)\cdot\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & 1\end{vmatrix}=(-\lambda-2)\cdot\left(1-\lambda^2\right)\Rightarrow Si\ |A-2I|=0\Rightarrow(-\lambda-2)\cdot\left(1-\lambda^2\right)=0\Rightarrow \text{a.2)}$$

$$\begin{cases}-\lambda-2=0\Rightarrow\lambda=-2\\ 1-\lambda^2=0\Rightarrow\lambda^2=1\Rightarrow\lambda=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=-1\end{cases}\Rightarrow\forall\lambda\in\Re-\{-1,1,-2\}\Rightarrow|A-2I|\neq0\Rightarrow Existe\ (A-2I)^{-1}\end{cases}$$

$$AX-2X=b\Rightarrow(A-2I)X=b\Rightarrow(A-2I)^{-1}(A-2I)X=(A-2I)^{-1}b\Rightarrow IX=(A-2I)^{-1}b\Rightarrow$$
$$X=(A-2I)^{-1}b$$

$$|A-2I|=(-\lambda-2)\cdot\left(1-\lambda^2\right)\Rightarrow Si\ \lambda=0\Rightarrow|A-2I|=(0-2)\cdot\left(1-0^2\right)=(0-2)\cdot1=-2\neq0\Rightarrow Existe\ (A-2I)^{-1}$$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{|A-2I|}\cdot adj\left[(A-2I)^t\right]\Rightarrow(A-2I)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -5 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow(A-2I)^t=\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & -5 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\left[(A-2I)^t\right]=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow(A-2I)^{-1}=\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ y\end{pmatrix}=(A-2I)^{-1}\cdot b\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -y/2-5\\ 1\end{pmatrix}$$. Igualando miembro a miembro tenemos:

x = 1, y = $-\frac{y}{2}$-5, $\Rightarrow$ 3y = -10, luego y = $\frac{-10}{3}$ y z = 1. La solución es (x,y,z) = $\left(1, \frac{-10}{3}, 1\right)$.

Continuación del Problema 1 de la opción B

b)

$$|M| = \begin{vmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 5F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -F_3 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} F_3 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 15\cdot\begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} - 3\cdot 0 =$$

$$= 15\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = (-15)\cdot(-2) = 30$$

2. *(2 puntos)*

a) *(0,75 puntos)* Sea α un parámetro real cualquiera. Dados los planos:

$$\pi : 3x + \alpha y + 2z - 10 = 0 \qquad \pi' : x - y + \alpha z - 5 = 0$$

¿Existen valores de α para los que los planos sean paralelos?

b) *(1,25 puntos)* Encuentre la ecuación de la recta paralela a la recta intersección de los planos: $\pi : 3x + 2y + z = 10 \qquad \pi' : 4x - 2y - 8z = 10$ que pasa por el punto **(1 , 1 , 0)**.

a) Dos planos son paralelos si sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (3\,,\,\alpha\,,\,2) \\ \overrightarrow{v_{\pi'}} = (1\,,\,-1\,,\,\alpha) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{\alpha}{-1} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{1} = \frac{\alpha}{-1} \Rightarrow \alpha = -3 \\ \frac{3}{1} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow 3\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \\ \frac{\alpha}{-1} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = -2 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{-2} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases}$$

No existen valores de α para los que los planos sean paralelos

b) La recta **r** queda determinada por el vector director de la recta **s**, intersección de los planos dados, y el punto **P** por donde pasa.

$$\begin{cases} \pi : 3x + 2y + z = 10 \\ \pi' : 4x - 2y - 8z = 10 \end{cases} \Rightarrow 7x - 7z = 20 \Rightarrow 7x = 20 + 7z \Rightarrow x = \frac{20}{7} + z \Rightarrow 2x - y - 4z = 5 \Rightarrow$$

$$2\cdot\left(\frac{20}{7} + z\right) - y - 4z = 5 \Rightarrow y = -5 - 4z + \frac{40}{7} + 2z \Rightarrow y = \frac{5}{7} - 2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{20}{7} + \lambda \\ y = \frac{5}{7} - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} = (1\,,\,-2\,,\,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

3. *(5 puntos)*

a) *(3 puntos)* Sea $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$

1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de **f(x)**
2) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, las asíntotas de **f(x)**
3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos de **f(x)**

b) *(2 puntos)* Calcule: $\int \left[\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x^2} \right] dx$

$a.1)$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(x) = 0^2 e^{\frac{1}{0^2}} = 0 \cdot e^{\infty} = 0 \cdot \infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{e^{\frac{1}{0^2}}}{\frac{1}{0^2}} = \frac{e^{\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2x}{x^4}}{\frac{-2x}{x^4}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{0^2}} = e^{\infty} = \infty$$

$$Dom(f) = \forall x \in \Re - \{0\}$$

$a.2)$

$$\text{Asíntota vertical} \Rightarrow x = 0$$

Asíntota horizontal

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \cdot e^{\frac{1}{\infty}} = \infty \cdot e^0 = \infty \cdot 1 = \infty \Rightarrow \text{No existe asíntota horizontal cuando } x \to \infty$$

$$y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \cdot e^{\frac{1}{\infty}} = \infty \cdot e^0 = \infty \cdot 1 = \infty \Rightarrow \text{No existe asíntota horizontal cuando } x \to -\infty$$

Asíntota oblicua

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} x e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \cdot e^{\frac{1}{\infty}} = \infty \cdot 1 = \infty \Rightarrow \text{No existe asíntota oblicua cuando } x \to \infty$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} x e^{\frac{1}{x^2}} = -\infty \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = \infty \cdot 1 = -\infty \Rightarrow \text{No existe asíntota oblicua cuando } x \to -\infty$$

$a.3)$

$$f'(x)=2x\cdot e^{\frac{1}{x^2}}+x^2e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-2x}{x^4}=2x\cdot e^{\frac{1}{x^2}}-2\frac{x^3}{x^4}e^{\frac{1}{x^2}}=2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)=2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\frac{\left(x^2-1\right)}{x}=2e^{\frac{1}{x^2}}\frac{\left(x^2-1\right)}{x}\Rightarrow$$

$$Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow 2e^{\frac{1}{x^2}}\frac{(x-1)(x+1)}{x}>0\Rightarrow\begin{cases}2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ e^{\frac{1}{x^2}}>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x-1>0\Rightarrow x>1\\ x+1>0\Rightarrow x>-1\\ x>0\end{cases}$$

	$-\infty$ -1	-1 0	0 1	1 ∞
2 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
$e^{\frac{1}{x^2}}$ **> 0**	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**
2 > 0	**(-)**	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x\in\Re/(-1<x<0)\cup(x>1)$
Decreciente $\forall x\in\Re/(x<-1)\cup(0<x<1)$

Mínimo relativo en $x=-1\Rightarrow f(-1)=(-1)^2e^{\frac{1}{(-1)^2}}=1\cdot e^1=e$ **de Decrecimiento pasa a Crecimiento**

En x = 0 no existe función

Mínimo relativo en $x=1\Rightarrow f(1)=1^2e^{\frac{1}{1^2}}=1\cdot e^1=e$ **de Decrecimiento pasa a Crecimiento**

$b)$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & si\quad x<2\\ 2 & si\quad 2<x<4\\ -2x^2+3 & si\quad x>4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-}f'(x)=2\cdot2=4\\ \lim\limits_{x\to2^+}f'(x)=2\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to2^-}f'(x)=4\neq\lim_{x\to2^+}f'(x)=2$$

$No\ es\ derivable\ en\ x=2$

b) ***(2 puntos)*** **Calcule:** $\int \left[\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x^2} \right] dx$

b)

$$I = \int \left[\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x^2} \right] dx = \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = I_1 + I_2.$$

Calculamos cada integral por separado y luego las sumamos.

$$I_1 = \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \left(x^{2-1/2} - 2 \cdot x^{1-1/2} + x^{-1/2} \right) dx = \int \left(x^{3/2} - 2 \cdot x^{1/2} + x^{-1/2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} - 2 \cdot \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C_1 = \frac{x^{5/2}}{5/2} - 2 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C_1 = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + C_1.$$

$$I_2 = \int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{llll} \text{Por} & \rightarrow \ u = \ln(x) & \rightarrow \ du = \dfrac{dx}{x} & \\ \text{Partes} & \rightarrow \ dv = \dfrac{dx}{x^2} & \rightarrow \ v = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{-1}{x} & \end{array} \right\} =$$

$$= (\ln(x)) \cdot \left(\frac{-1}{x} \right) - \int \left(\frac{-1}{x} \right) \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C_2.$$

Por tanto la integral pedida es $I = \int \left[\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x^2} \right] dx = I_1 + I_2 =$

$$= \frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + C_1 + \left(-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C_2 \right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + K, \text{ con } K = C_1 + C_2.$$